Arbeitsplan - Stetigkeit (und Differenzierbarkeit)

Ziel(e): Erarbeitung der Eigenschaften Stetigkeit (und Differenzierbarkeit) einer Funktion. Folgerungen für das Schaubild einer Funktion. Erschließung von Zusammenhängen.

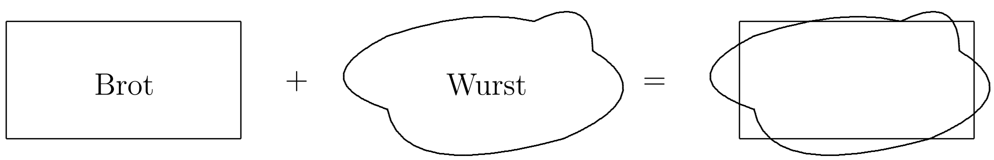
Schulische Arbeitszeit: 35min — Buch: Lambacher Schweizer LS 11 (2001)
Häusliche Arbeitszeit: 15min

Heftüberschrift "IV.1.3 Stetigkeit und Differenzierbarkeit"

Die hier behandelten Funktionseigenschaften liefern Argumente zum Beweis der der folgenden beiden Aussagen:

1. Betrachtet man auf der Erde den Temperaturverlauf entlang eines Breitengrades so gibt es mindestens zwei Punkte an denen dieselbe Temperatur herrscht.

2. Man kann ein Wurstbrot der Form



so teilen, dass beide Teile aus gleich viel Wurst und Brot bestehen.

Im Folgenden geht es dabei anschaulich um die Qualität des Schaubildes einer Funktion. Man bewertet dabei die Kontinuität und Glattheit der Kurve. Für die notwendigen Betrachtungen benötigt auch abschnittsweise definierte Funktionen, bspw

$$f : D_f \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \quad x < 0 \\ x^2 & , \quad 0 \leq x \end{cases}$$

wichtig sind dabei jeweils der Definitionsbereich und die Abschnittsgrenzen.

Aufgabe 1: Zeichne das Schaubild der Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{für} \quad x < -1 \\ 2 & \text{für} \quad -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{für} \quad 1 < x < 2 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{für} \quad 2 \leq x \end{cases}$$

Das Schaubild im letzten Abschnitt entpricht dem rechten Ast der Normalparabel, der um 2 nach rechts und 1 nach oben verschoben ist. Gib die Definitionsmenge (und sogenannte Definitionslücken bezüglich $\mathbb{R}$) an.
Wie verläuft die Kurve an den Abschnittsgrenzen?

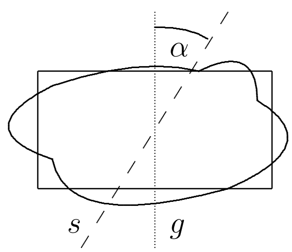
Aufgabe 2: Bearbeite im Buch S.148 die Definition der Stetigkeit und die darauffolgenden Erläuterungen einschließlich Beispiel 2. Übertrage Definition und Beispiel 1 in dein Heft.
An welchen Stellen ist die Funktion aus Aufgabe 1 stetig, unstetig oder diesbezüglich nicht untersuchbar?

Aufgabe 3: Im Englischen nennt man stetige Funktionen 'continuous'. Erkläre diesen Begriff und übertrage ihn ins Deutsche. Gib daraufhin eine grobe Veranschaulichung der Stetigkeit einer Funktion an.
Überprüfe die entsprechende Aussage im Buch auf S.149.

Aufgabe 4: Bearbeite im Buch auf S.149 den Text ab "*Wenn eine Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar ist …*" bis zum Seitenende.
Übertrage den Satz und das Beispiel 3 ins Heft.

Aufgabe 5: Man nennt differenzierbare Funktionen auch 'glatt' im Sinne von 'nicht uneben'. Finde einen entsprechenden englischen Begriff. Gib daraufhin eine grobe Veranschaulichung der Differenzierbarkeit einer Funktion an.
Überprüfe die entsprechende Aussage im Buch S.149.

Man beweist nun Aussage 2 folgendermaßen. Man wählt zunächst die Schnittgerade die durch den Schwerpunkt (Schnittpunkt der Diagonalen) des Brotes. So wird dieses immer in zwei gleichgroße Hälften geteilt. Nun betrachtet man das Verhältnis V der 'Wursthälften' in Abhängigkeit vom 'Schnittwinkel' α zwischen Schnittgerade s und der Vertikalen g.



'Setzt' man sich auf die Schnittgerade s, dann bildet man für das Verhältnis V den Quotienten $W_L : W_R$ aus der 'Wurstfläche' linker Hand W_L und derjenigen rechter Hand W_R. Nach einer halben Umdrehung besitzt dann das Verhältnis genau den Kehrwert vom anfänglichen.
Man startet zum Beispiel mit

$$\alpha = 0° \quad \text{und} \quad V = V_0 > 1 \quad \text{für} \quad W_L > W_R$$

Dann gilt für $\alpha = 180°$

$$V = 1 : V_0 < 1$$

weil die linke und rechte Hälfte jetzt vertauscht sind. Da die Drehung der Schnittgeraden natürlich ein kontinuierlicher, also stetiger Vorgang ist, muss es dazwischen einen Winkel α geben, für den $V = 1$ gilt.

Simon sagt: Beweise Aussage 1!

Übungen: S.150/2 a),c); S.150/3 a); S.150/4